

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе

А.А. Воронов

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Случайные процессы и математическая статистика
по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Управление инновациями в бизнесе Физтех-школа бизнеса высоких технологий кафедра высшей математики
курс:	2
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 104 всего, в том числе:

лекции: 52 час.

семинары: 52 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 121 час.

Всего часов: 225, всего зач. ед.: 5

Количество контрольных работ, заданий: 3

Программу составили:

А.В. Булинский, канд. физ.-мат. наук, доцент

С.Е. Городецкий, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры высшей математики 21.04.2023

Аннотация

Теория стохастических, иначе говоря, случайных процессов является важнейшим разделом современной теории вероятностей. Речь идет о построении и изучении моделей, описывающих динамику развития случайных явлений в пространстве и времени. Тем самым даются ответы на запросы многих естественно-научных, экономических и социальных наук.

Случайный процесс вводится как семейство случайных величин, заданных на каком-то вероятностном пространстве и параметризованных элементами некоторого множества. Если параметрическое множество содержится в действительной прямой, то его точки интерпретируются как моменты времени. Соответственно возникают стохастические модели с дискретным и непрерывным временем. В каждый момент случайные величины принимают действительные значения, но рассматриваются и более общие модели, например, семейства случайных векторов. Случайный процесс можно трактовать и как одно измеримое отображение пространства элементарных исходов в пространство функций, заданных на используемом параметрическом множестве. Другими словами, каждому элементарному исходу соответствует траектория, описывающая эволюцию изучаемой системы во времени.

В начале курса даются примеры интересных для приложения моделей, которые можно построить, отправляясь от последовательностей независимых случайных величин с заданными распределениями.

Наряду с фундаментальной теоремой Колмогорова о согласованных распределениях используются различные явные конструкции таких важных для теории и приложений процессов, как пуассоновский (модель счётчика Гейгера или же простейшая модель наступления страховых случаев) и винеровский (модель одномерного броуновского движения). Упомянутые процессы с интересными свойствами траекторий входят в класс процессов, имеющих независимые приращения. При этом винеровский процесс принадлежит также важному классу гауссовских процессов. Для развиваемой теории существенную роль играет понятие условного математического ожидания. С его помощью определяются мартингалы и марковские процессы. Детально рассматриваются марковские процессы с дискретным пространством состояний, называемые цепями Маркова.

Изучаются также процессы, стационарные в узком или широком смысле. Анализ последних основан на свойствах их ковариационных функций и на спектральном представлении в виде интеграла по ортогональной случайной мере.

Заключительная часть посвящена основам стохастического анализа, опирающегося на интеграл Ито. Материал курса демонстрирует

разнообразные способы описания и изучения случайных процессов, применяемых в различных моделях.

Для его глубокого понимания необходимо основательное изучение предшествующего курса теории вероятностей.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

- формирование базовых знаний по теории случайных (стохастических) процессов для дальнейшего использования в разнообразных приложениях, -формирование математической культуры и исследовательских навыков при изучении вероятностных моделей эволюции (динамики) систем, актуальных для физики, химии, биологии, радиотехники, экономики, финансовой математики и др.,
- овладение методами анализа случайных явлений и процессов.

Задачи дисциплины

- приобретение обучающимися теоретических знаний и практических навыков, связанных с применениями теории стохастических процессов,
- свободное владение базовыми понятиями, формулами и классическими схемами,
- знание основных теорем и границ их применимости,
- развитие умения строить математические модели, отражающие те или иные стороны динамики случайных явлений, и судить об адекватности моделей.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
--------------------------------	-----------------------------------

УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- определения и свойства основных объектов изучения теории стохастических процессов, формулировки наиболее важных утверждений, методы их доказательств, возможные сферы приложений, в том числе:
- понятие случайного процесса, определения эквивалентности процессов,
- определения конечномерных распределений, функции среднего, ковариационной функции,
- важнейшие классы процессов (гауссовские, с независимыми приращениями, мартингалы,
- марковские, процессы второго порядка, стационарные),
- определение и свойства пуассоновского процесса,
- определение и свойства винеровского процесса.

уметь:

- решать задачи вычислительного и теоретического характера в области теории случайных процессов, устанавливать взаимосвязи между вводимыми понятиями, применять и доказывать основные теоремы и формулы, в том числе:
- находить числовые характеристики распределений процессов,
- выяснять принадлежность процесса определенному классу,
- выявлять наличие и находить спектральную плотность стационарной последовательности,
- доказывать эквивалентность разных определений винеровского процесса,
- доказывать недифференцируемость траекторий броуновского движения,
- применять теорему Колмогорова о существовании непрерывной на отрезке модификации.

владеть:

- разнообразным математическим аппаратом, подбирая сочетания различных методов, для описания и анализа стохастических моделей динамики, в том числе:
- основными приемами внесения предельного перехода под знак интеграла Лебега,
- использованием различных видов сходимости последовательностей случайных величин,
- аппаратом условных математических ожиданий для уверенного применения их свойств,
- методами вычисления стохастического интеграла, основанными как на аппроксимационной схеме, так и применении формулы Ито.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа

1	Марковские цепи с дискретным временем.	8	8		20
2	Пуассоновский случайный процесс. Процессы восстановления. Марковские цепи с непрерывным временем.	8	8		19
3	Условное математическое ожидание. Мартингалы, марковские моменты.	10	10		25
4	Оценка неизвестных параметров распределений и их свойства.	16	16		32
5	Стационарные процессы.	10	10		25
Итого часов		52	52		121
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		225 час., 5 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 4 (Весенний)

1. Марковские цепи с дискретным временем.

Матрица переходных вероятностей однородной цепи и её свойства. Вероятности перехода за несколько шагов. Классификация состояний марковской цепи. Стационарное распределение. Условия детального баланса. Примеры марковских цепей. Моменты остановки. Марковские цепи с бесконечным количеством состояний.

2. Пуассоновский случайный процесс. Процессы восстановления. Марковские цепи с непрерывным временем.

Экспоненциальное распределение. Определение пуассоновского процесса. Сложный пуассоновский процесс. Суперпозиция и фильтрация пуассоновских процессов. Процессы восстановления. Марковские цепи с непрерывным временем. Приложения случайных процессов к задачам теории массового обслуживания.

3. Условное математическое ожидание. Мартингалы, марковские моменты.

Аппарат условных математических ожиданий. Основные свойства условного математического ожидания. Примеры явного вычисления условного математического ожидания. Мартингалы (субмартингалы), примеры с дискретным и непрерывным временем. Марковские моменты и моменты остановки. Игровая интерпретация. Задача о разорении игрока.

4. Оценка неизвестных параметров распределений и их свойства.

Примеры несмещенных и состоятельных оценок (моменты, дисперсия); смещенных, но состоятельных оценок; несостоятельных, но несмещенных оценок. Оценки функций от параметров. Пример ситуации, в которой не существует несмещенной оценки некоторой функции от параметра.

Оценки максимального правдоподобия (о.м.п.) и их свойства (состоятельность, асимптотическая нормальность и эффективность). Достаточная статистика. Критерий факторизации. Эффективные оценки. Доверительные интервалы.

5. Стационарные процессы.

Ошибка первого и второго рода. Лемма Неймана—Пирсона. Критерий хи-квадрат проверки гипотез. Проверка гипотезы независимости. Критерий обобщённого отношения правдоподобия. Проверка гипотез для нормальных распределений. Линейная регрессия.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиа проектором, экраном и микрофоном.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Случайные процессы. Примеры, задачи и упражнения [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. В. Булинский ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Моск. фмз.-техн. ин-т (гос. ун-т .— М. : МФТИ, 2010 .— 216 с.
 2. Вероятность [Текст] : в 2 т. Т. 1 : Элементарная теория вероятностей. Математические основания. Предельные теоремы : учебник для вузов / А. Н. Ширяев .— 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Изд-во МЦНМО, 2007, 2011 .— 552 с.
- Булинский, А. В.
Теория случайных процессов [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. В. Булинский, А. Н. Ширяев ; [Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова] .— М. : Физматлит, 2005 .— 402 с. : ил. — (Классический университетский учебник). - Библиогр.: с. 385-393. - Алф. указ.: с. 394-402. - ISBN 5-9221-0335-0 (в пер.) .— Полный текст (Доступ из сети МФТИ / Удаленный доступ).

Дополнительная литература

1. Элементы теории функций и функционального анализа [Текст] : учебник для вузов / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин .— 7-е изд. — М. : Физматлит, 2004, 2006, 2009, 2012 .— 572 с.
 2. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика [Текст] : учебник для вузов / Ю. А. Розанов .— 2-е изд., доп. — М. : Наука, 1989 .— 312 с.
- Боровков, А. А.
Теория вероятностей [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. А. Боровков .— Изд. стереотип. — М. : ЛИБРОКОМ, 2016 .— 656 с. - Библиогр.: с. 645-646. - Список осн. обозначений: с. 647-648. - Предм. указ.: с. 649-652. - ISBN 978-5-397-05170-5 (в пер.).

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://www.math.mipt.ru>
<http://lib.mipt.ru>
<http://www.exponenta.ru> – образовательный математический сайт.
<http://mathnet.ru> – общероссийский математический портал.
<http://www.edu.ru> – федеральный портал «Российское образование».
<http://benran.ru> –библиотека по естественным наукам Российской академии наук.
<http://www.i-exam.ru> – единый портал Интернет-тестирования в сфере образования.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях возможно использование мультимедийных технологий, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Приведены в ежегодно разрабатываемых домашних заданиях.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Управление инновациями в бизнесе Физтех-школа бизнеса высоких технологий кафедра высшей математики
курс:	<u>2</u>
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Дифференцированный зачет

Разработчики:

А.В. Булинский, канд. физ.-мат. наук, доцент
С.Е. Городецкий, канд. физ.-мат. наук, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Случайные процессы и математическая статистика» обучающийся должен:

знать:

- определения и свойства основных объектов изучения теории стохастических процессов, формулировки наиболее важных утверждений, методы их доказательств, возможные сферы приложений, в том числе:
- понятие случайного процесса, определения эквивалентности процессов,
- определения конечномерных распределений, функции среднего, ковариационной функции,
- важнейшие классы процессов (гауссовские, с независимыми приращениями, мартингалы,
- марковские, процессы второго порядка, стационарные),
- определение и свойства пуассоновского процесса,
- определение и свойства винеровского процесса.

уметь:

- решать задачи вычислительного и теоретического характера в области теории случайных процессов, устанавливать взаимосвязи между вводимыми понятиями, применять и доказывать основные теоремы и формулы, в том числе:
- находить числовые характеристики распределений процессов,
- выяснять принадлежность процесса определенному классу,
- выявлять наличие и находить спектральную плотность стационарной последовательности,
- доказывать эквивалентность разных определений винеровского процесса,
- доказывать недифференцируемость траекторий броуновского движения,
- применять теорему Колмогорова о существовании непрерывной на отрезке модификации.

владеть:

- разнообразным математическим аппаратом, подбирая сочетания различных методов, для описания и анализа стохастических моделей динамики, в том числе:
- основными приемами внесения предельного перехода под знак интеграла Лебега,
- использованием различных видов сходимости последовательностей случайных величин,
- аппаратом условных математических ожиданий для уверенного применения их свойств,
- методами вычисления стохастического интеграла, основанными как на аппроксимационной схеме, так и применении формулы Ито.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль осуществляется на основе выполнения студентами совокупности домашних заданий и контрольных работ в соответствии с учебным планом. Данные о посещаемости и текущей успеваемости вносятся преподавателями в специальные журналы.

Текущий контроль на основе домашних заданий осуществляется в течении учебного семестра в сроки, установленные Учебным управлением, в соответствии с учебным планом.

Для сдачи задания студент обязан предоставить решение задачи домашнего задания в письменной форме, ответить на вопросы преподавателя и написать контрольную работу по заданию, по которой проверяются знание понятий и утверждений по темам сдаваемого задания и умению решать задачи.

Во время выполнения контрольной работы нельзя пользоваться помощью других лиц, вычислительной техники и мобильными телефонами.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень контрольных вопросов для дифференцированного зачета:

1. Показать, что конечномерные распределения случайного процесса удовлетворяют условиям согласованности.
2. Дать определение эквивалентности стохастических процессов и привести примеры эквивалентных и неэквивалентных процессов.
3. Как соотносятся эквивалентность процессов и совпадение их конечномерных распределений?
4. Почему пуассоновский процесс постоянной интенсивности эквивалентен процессу восстановления?
5. Почему пуассоновский процесс не имеет модификации с непрерывными почти наверно траекториями?
6. Сформулировать в терминах характеристических функций вероятностных мер на конечномерных евклидовых пространствах утверждение фундаментальной теоремы Колмогорова о существовании случайного процесса.
7. Какими свойствами обладает характеристическая функция n -мерного гауссовского вектора? Почему независимость компонент такого вектора равносильна их некоррелированности?
8. Всякое ли параметрическое семейство гауссовских величин является гауссовским процессом?
9. Показать, что все конечномерные распределения гауссовского процесса определяются его одномерными и двумерными распределениями.
10. Привести примеры процессов с независимыми и зависимыми приращениями.
11. Верно ли, что сумма двух процессов, заданных на одном параметрическом множестве, из которых один имеет независимые приращения, а другой является детерминированным, является процессом с независимыми приращениями? Тот же вопрос для произведения таких процессов.
12. Почему постоянство функции среднего является необходимым условием мартингальности процессов с непрерывным и с дискретным временем?

Критерии оценивания

Оценка «отлично (10)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

оценка «отлично (9)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые были самостоятельно обнаружены и исправлены;

оценка «отлично (8)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые после указания экзаменатора были самостоятельно исправлены;

оценка «хорошо (7)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает неточности в ответе или делает несущественные ошибки при решении задач;

оценка «хорошо (6)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает небольшие ошибки в ответе и (или) при решении задач;

оценка «хорошо (5)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но отвечает неуверенно и (или) допускает ошибки при решении задач;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, если при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, не владеющему некоторыми разделами учебной программы, но умеющему применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется обучающемуся, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;

оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется обучающемуся, показавшему полное незнание учебной программы дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Дифференцированный зачет проводится по итогам текущей успеваемости сдачи заданий и контрольных вопросов, предусмотренных программой дисциплины.

При проведении устного опроса обучающемуся предоставляется 1 астрономический час на подготовку.

Опрос обучающегося на устном опросе не должен превышать двух астрономических часов.

Во время проведения устного опроса обучающиеся могут пользоваться только программой дисциплины.